Devoir à la maison de mathématiques

Terminale 09 et 10

mardi 19 mars 2024

EXERCICE 1. Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.
On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.
Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tour entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois n.
Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On pose $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\begin{cases} d_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$

① *a)* Justifier l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$ dans le contexte de l'exercice.

b) Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.

② Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

③ *a)* Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C = AC + B$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

c) On admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$

④ *a)* On admet que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

b) En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?